Chapitre 1

Exercice 1

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilités. On dira que deux partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont *indépendantes* si, pour tout $P \in \mathcal{P}$ et tout $Q \in \mathcal{Q}$, on a $\mu(P \cap Q) = \mu(P)\mu(Q)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont indépendantes ;

- $H(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H(\mathcal{P}) + H(\mathcal{Q})$;

- $H(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = H(\mathcal{P})$.

Exercice 2

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré, où $\mu(X) = 1$. Prouver l'*inégalité de Rokhlin* : pour toutes partitions mesurables $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, on a

$$|h(T, \mathcal{P}) - h(T, \mathcal{Q})| \leq D(\mathcal{P}, \mathcal{Q}).$$

Exercice 3

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ et $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$ deux systèmes dynamiques mesurés, avec $\mu(X) = \nu(Y) = 1$. On considère le produit $(X \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mu \otimes \nu, T \times S)$. Montrer que

$$h_{\mu\otimes\nu}(T \times S) = h_\mu(T) + h_\nu(S).$$

Exercice 4

Soit $(X, \mathcal{B})$ un ensemble muni d'une σ-algèbre. On suppose que $T : X \to X$ est une transformation mesurable et que μ et ν sont deux mesures de probabilité invariantes.

Montrer que pour toute partition mesurable $\mathcal{P} = (P_i)_{\in I}$, on a :

$$tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) \leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}) \leq tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) - t\ln t - (1-t)\ln(1-t).$$

En déduire que

$$H_{t\mu+(1-t)\nu}(T, \mathcal{P}) = tH_\mu(T, \mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(T, \mathcal{P}),$$

puis que

$$h_{t\mu+(1-t)\nu}(T) = th_\mu(T) + (1-t)h_\nu(T).$$

Exercice 5

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré, avec $\mu(X) = 1$. Soit $\mathcal{P}$ une partition mesurable telle que $\mathcal{P} \in \overline{\bigvee_{m=1}^{+\infty} T^{-m}\mathcal{P}}$. Montrer que $h(T, \mathcal{P}) = 0$ (en fait la réciproque est vraie).

Exercice 6

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ et $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$ deux systèmes dynamiques mesurés, avec $\mu(X) = \nu(Y) = 1$. On suppose que $h_\mu(T) = h_\nu(S)$. Cela implique t-il les systèmes sont conjugués ?

Exercice 7

On note σ le décalage de Bernouilli défini sur $\{1, \dots, r\}^{\mathbb{N}}$. Monter que pour toute mesure borélienne de probabilité invariante par σ, on a $h_\mu(\sigma) \leq \ln r$. Montrer que $h_\mu(\sigma) = \ln r$ si et seulement si μ est la mesure produit équidistribuée.

Exercice 8

On fixe $r \geq 2$ et on considère la transformation

$$T \ : \begin{array}{l} \mathbf{T}^1 \to \mathbf{T}^1 \\ x \mapsto rx \end{array}.$$

Monter que pour toute mesure borélienne de probabilité invariante par T, on a $h_\mu(T) \leq \ln r$. Montrer que $h_\mu(T) = \ln r$ si et seulement si μ est la mesure de Haar.